**第二讲双曲线**

id:2147490817;FounderCES

题组1求双曲线的标准方程

1*.*[2016天津,6,5分][理]已知双曲线*-=*1(*b>*0),以原点为圆心,双曲线的实半轴长为半径长的圆与双曲线的两条渐近线相交于*A*,*B*,*C*,*D*四点,四边形*ABCD*的面积为2*b*,则双曲线的方程为()

A.*-=*1 B.*-=*1 C.*-=*1 D.*-=*1

2*.*[2014天津,5,5分][理]已知双曲线*-=*1(*a>*0,*b>*0)的一条渐近线平行于直线*l*:*y=*2*x+*10,双曲线的一个焦点在直线*l*上,则双曲线的方程为()

A.*-=*1 B.*-=*1 C.*-=*1 D.*-=*1

题组2双曲线的几何性质问题

3*.*[2016全国卷Ⅰ,5,5分][理]已知方程*-=*1表示双曲线,且该双曲线两焦点间的距离为4,则*n*的取值范围是()

A.(-1,3) B.(-1,) C.(0,3) D.(0,)

4*.*[2016全国卷Ⅱ,11,5分][理]已知*F*1,*F*2是双曲线*E*:*-=*1的左、右焦点,点*M*在*E*上,*MF*1与*x*轴垂直,sin∠*MF*2*F*1*=*,则*E*的离心率为()

A. B. C. D.2

5*.*[2015新课标全国Ⅱ,11,5分][理]已知*A*,*B*为双曲线*E*的左、右顶点,点*M*在*E*上,△*ABM*为等腰三角形,且顶角为120*°*,则*E*的离心率为()

A. B.2 C. D.

6*.*[2015四川,5,5分][理]过双曲线*x*2*-=*1的右焦点且与*x*轴垂直的直线,交该双曲线的两条渐近线于*A*,*B*两点,则*|AB|=*()

A*.* B*.*2 C*.*6 D*.*4

7*.*[2014新课标全国Ⅰ,4,5分][理]已知*F*为双曲线*C*:*x*2*-my*2*=*3*m*(*m>*0)的一个焦点,则点*F*到*C*的一条渐近线的距离为()

A. B.*m* C.3 D.3*m*

8*.*[2014广东,4,5分][理]若实数*k*满足0*<k<*9,则曲线*-=*1与曲线*-=*1的()

A.离心率相等 B.虚半轴长相等　　　C.实半轴长相等 D.焦距相等

9*.*[2013新课标全国Ⅰ,4,5分][理]已知双曲线*C*:*-=*1(*a>*0,*b>*0)的离心率为,则*C*的渐近线方程为()

A*.y=±x* B*.y=±x* C*.y=±x* D*.y=±x*

10*.*[2017北京,9,5分][理]若双曲线*x*2*-=*1的离心率为,则实数*m=　　　　.*

11*.*[2017山东,14,5分][理]在平面直角坐标系*xOy*中,双曲线*-=*1(*a>*0,*b>*0)的右支与焦点为*F*的抛物线*x*2*=*2*py*(*p>*0)交于*A*,*B*两点*.*若*|AF|+|BF|=*4*|OF|*,则该双曲线的渐近线方程为*.*

12*.*[2016北京,13,5分][理]双曲线*-=*1(*a>*0,*b>*0)的渐近线为正方形*OABC*的边*OA*,*OC*所在的直线,点*B*为该双曲线的焦点*.*若正方形*OABC*的边长为2,则 *a=　　　　.*

13*.*[2014福建,19,13分][理]已知双曲线*E*:*-=*1(*a>*0,*b>*0)的两条渐近线分别为*l*1:*y=*2*x*,*l*2:*y=-*2*x.*

(Ⅰ)求双曲线*E*的离心率;

(Ⅱ)如图10*-*2*-*1,*O*为坐标原点,动直线*l*分别交直线*l*1,*l*2于*A*,*B*两点(*A*,*B*分别在第一、四象限),且△*OAB*的面积恒为8*.*试探究:是否存在总与直线*l*有且只有一个公共点的双曲线*E*?若存在,求出双曲线*E*的方程;若不存在,说明理由*.*

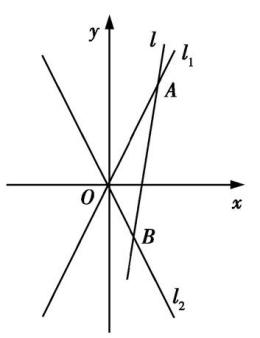


图10*-*2*-*1

id:2147490845;FounderCES

**A组基础题**

1*.*[2018辽宁省五校联考,4]在平面直角坐标系*xOy*中,已知双曲线*C*:*-=*1(*a>*0,*b>*0)的离心率为,从双曲线*C*的右焦点*F*引渐近线的垂线,垂足为*A*,若△*AFO*的面积为1,则双曲线*C*的方程为()

A.*-=*1 　　B.*-y*2*=*1　　　C.*-=*1 D.*x*2*-=*1

2*.*[2018合肥市高三调研,4] 双曲线*-=*1(*a>*0,*b>*0)的一条渐近线与直线*x+*2*y-*1*=*0垂直,则双曲线的离心率为()

A. B. C. D.*+*1

3*.*[2017长春市高三第四次质量监测,11]已知*F*1,*F*2是双曲线*C*:*-=*1(*a>*0,*b>*0)的两个焦点,*P*是双曲线*C*上一点,若*|PF*1*|+|PF*2*|=*6*a*,且△*PF*1*F*2最小内角为30*°*,则双曲线*C*的渐近线方程是()

A.*x±y=*0 B.*x±y=*0　　C.2*x±y=*0 D.*x±*2*y=*0

4*.*[2017成都市三诊,5]已知双曲线*C*:*-=*1(*a>*0,*b>*0),直线*l*:*y=*2*x-*2*.*若直线*l*平行于双曲线*C*的一条渐近线且经过*C*的一个顶点,则双曲线*C*的焦点到渐近线的距离为()

A.1 B.2 C. D.4

5*.*[2017沈阳市三模,6]已知*F*1,*F*2是双曲线*C*:*-=*1(*a>*0,*b>*0)的两个焦点,若在双曲线上存在点*P*满足2*|+|*≤*||*,则双曲线的离心率的取值范围是()

A.(1,] B.(1,2]　　　C.[,+∞) D.[2,+∞)

6*.*[2017桂林、百色、梧州、崇左、北海五市联考,11]设*P*为双曲线*x*2*-=*1右支上一点,*M*,*N*分别是圆(*x+*4)2*+y*2*=*4和(*x-*4)2*+y*2*=*1上的点,设*|PM|-|PN|*的最大值和最小值分别为*m*,*n*,则*|m-n|=*()

A.4 B.5 C.6 D.7

**B组提升题**

7*.*[2018广东第一次七校联考,11]已知双曲线*C*:*-=*1(*a>*0,*b>*0)的右焦点为*F*,以*F*为圆心和双曲线的渐近线相切的圆与双曲线的一个交点为*M*,且*MF*与双曲线的实轴垂直,则双曲线*C*的离心率为()

A*.* B*.* C. D*.*2

8*.*[2018南昌市调研,12]已知双曲线*C*:*-=*1(*a>*0,*b>*0)的左、右焦点分别为*F*1,*F*2,*P*为双曲线*C*上第二象限内一点,若直线*y=x*恰为线段*PF*2的垂直平分线,则双曲线*C*的离心率为()

A*.* B*.* C*.* D*.*

9*.*[2018洛阳市尖子生第一次联考,9]设双曲线*C*:*-=*1的右焦点为*F*,过*F*作双曲线*C*的渐近线的垂线,垂足分别为*M*,*N*,若*d*是双曲线上任意一点*P*到直线*MN*的距离,则的值为()

A. B. C. D.无法确定

10*.*[2018益阳市、湘潭市高三调考,15]已知*F*为双曲线*-=*1(*a>*0,*b>*0)的左焦点,定点*A*为双曲线虚轴的一个端点,过*F*,*A*两点的直线与双曲线的一条渐近线在*y*轴右侧的交点为*B*,若*=*3,则此双曲线的离心率为*.*

**答案**

id:2147494475;FounderCES

1*.*D根据圆和双曲线的对称性,可知四边形*ABCD*为矩形*.*双曲线的渐近线方程为*y=±x*,圆的方程为*x*2*+y*2*=*4,不妨设交点*A*在第一象限,由得故四边形*ABCD*的面积为4*xAyA==*2*b*,解得*b*2*=*12,故所求的双曲线的方程为*-=*1,选D*.*

2*.*A由题意可知,双曲线的一条渐近线*y=x*与直线*y=*2*x+*10平行,所以*=*2*①*,且左焦点为(*-*5,0),所以*a*2*+b*2*=c*2*=*25*②*,由*①②*,解得*a*2*=*5,*b*2*=*20,故双曲线的方程为*-=*1*.*选A*.*

3*.*A由题意得(*m*2*+n*)(3*m*2*-n*)*>*0,解得*-m*2*<n<*3*m*2*.*由该双曲线两焦点间的距离为4,得*m*2*+n+*3*m*2*-n=*4,即*m*2*=*1,所以*-*1*<n<*3*.*故选A*.*

4*.*A设*F*1(*-c*,0),将*x=-c*代入双曲线方程,得*-=*1,所以*=-*1*=*,所以*y=±.*因为sin∠*MF*2*F*1*=*,所以tan∠*MF*2*F*1*=====-=-=*,所以*e*2*-e-*1*=*0,所以*e=.*故选A*.*

5*.*D设双曲线的方程为*-=*1(*a>*0,*b>*0),不妨设点*M*在第一象限,则*AB=BM=*2*a*,

∠*MBA=*120*°*,作*MH*⊥*x*轴于点*H*,则∠*MBH=*60*°*,*BH=a*,*MH=a*,所以*M*(2*a*,*a*)*.*将点*M*的坐标代入双曲线的方程*-=*1,得*a=b*,所以*e=.*故选D*.*

6*.*D由双曲线的标准方程*x*2*-=*1,得右焦点*F*(2,0),两条渐近线方程为*y=±x*,直线*AB*:*x=*2,所以不妨取*A*(2,2),*B*(2,*-*2),则*|AB|=*4,故选D*.*

7*.*A由题意知,双曲线的方程可化为*-=*1,不妨设*F*(,0),渐近线方程为*x-y=*0,则焦点*F*到一条渐近线的距离为*=.*故选A*.*

8*.*D由0*<k<*9,易知两曲线均为双曲线且焦点都在*x*轴上,由*=*,得两双曲线的焦距相等,故选D*.*

9*.*C因为双曲线*-=*1的焦点在*x*轴上,所以双曲线的渐近线方程为*y=±x.*又离心率为*e====*,所以*=*,所以双曲线的渐近线方程为*y=±x*,故选C*.*

10*.*2由双曲线的标准方程可知*a*2*=*1,*b*2*=m*,所以*a=*1,*c=*,所以*e===*,解得*m=*2*.*

11*.y=±x*设*A*(*x*1,*y*1),*B*(*x*2,*y*2)*.*由抛物线的定义可知*|AF|=y*1*+*,*|BF|=y*2*+*,*|OF|=.*由*|AF|+|BF|=y*1*++y*2*+=y*1*+y*2*+p=*4*|OF|=*2*p*,得*y*1*+y*2*=p.*

由得*kAB===.*

由得*kAB===*·,

则·*=*,所以*=*⇒*=*,所以双曲线的渐近线方程为*y=±x.*

12*.*2双曲线*-=*1的渐近线方程为*y=±x*,由已知可得两条渐近线互相垂直,由双曲线的对称性可得*=*1,即*a=b.*因为正方形*OABC*的边长为2,所以*c=*2,所以*a*2*+b*2*=c*2*=*(2)2,解得*a=*2*.*

13*.*解法一(Ⅰ)因为双曲线*E*的渐近线分别为*y=*2*x*,*y=-*2*x*,

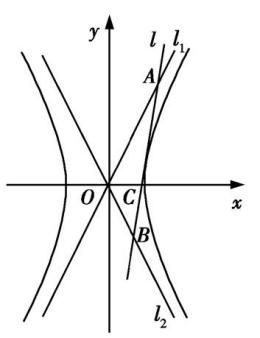
所以*=*2,所以*=*2,

故*c=a.*

从而双曲线*E*的离心率*e==.*

(Ⅱ)由(Ⅰ)知,双曲线*E*的方程为*-=*1*.*

设直线*l*与*x*轴相交于点*C*,如图D 10*-*2*-*2所示*.*



图D 10*-*2*-*2

当*l*⊥*x*轴时,若直线*l*与双曲线*E*有且只有一个公共点,

则*|OC|=a*,*|AB|=*4*a.*

因为△*OAB*的面积为8,

所以*|OC|*·*|AB|=*8,

即*a*·4*a=*8,解得*a=*2*.*

此时双曲线*E*的方程为*-=*1*.*

若存在满足条件的双曲线*E*,则*E*的方程只能为*-=*1*.*

以下证明:当直线*l*不与*x*轴垂直时,双曲线*E*:*-=*1也满足条件*.*

设直线*l*的方程为*y=kx+m*,依题意,得*k>*2或*k<-*2,则*C*(*-*,0)*.*

记*A*(*x*1,*y*1),*B*(*x*2,*y*2)*.*

由消去*x*,得*y*1*=.*同理得*y*2*=.*

由*S*△*OAB=|OC|*·*|y*1*-y*2*|*,得

*|-|*·*|-|=*8,即*m*2*=*4*|*4*-k*2*|=*4(*k*2*-*4)*.*

由消去*y*,得(4*-k*2)*x*2*-*2*kmx-m*2*-*16*=*0*.*

因为4*-k*2*<*0,

所以*Δ=*4*k*2*m*2*+*4(4*-k*2)(*m*2*+*16)*=-*16(4*k*2*-m*2*-*16)*.*

又*m*2*=*4(*k*2*-*4),

所以*Δ=*0,即*l*与双曲线*E*有且只有一个公共点*.*

因此,存在总与*l*有且只有一个公共点的双曲线*E*,且*E*的方程为*-=*1*.*

解法二(Ⅰ)同解法一*.*

(Ⅱ)由(Ⅰ)知,双曲线*E*的方程为*-=*1*.*

设直线*l*的方程为*x=my+t*,*A*(*x*1,*y*1),*B*(*x*2,*y*2)*.*

依题意得*-<m<.*

由消去*x*,得*y*1*=.*同理得*y*2*=.*

设直线*l*与*x*轴相交于点*C*,则*C*(*t*,0)*.*

由*S*△*OAB=|OC|*·*|y*1*-y*2*|=*8,得*|t|*·*|+|=*8,

所以*t*2*=*4*|*1*-*4*m*2*|=*4(1*-*4*m*2)*.*

由消去*x*,得(4*m*2*-*1)*y*2*+*8*mty+*4(*t*2*-a*2)*=*0*.*

因为4*m*2*-*1*<*0,直线*l*与双曲线*E*有且只有一个公共点,

所以*Δ=*64*m*2*t*2*-*16(4*m*2*-*1)(*t*2*-a*2)*=*0,

即4*m*2*a*2*+t*2*-a*2*=*0,即4*m*2*a*2*+*4(1*-*4*m*2)*-a*2*=*0,

即(1*-*4*m*2)(*a*2*-*4)*=*0,所以*a*2*=*4*.*

因此,存在总与*l*有且只有一个公共点的双曲线*E*,且*E*的方程为*-=*1*.*

id:2147494489;FounderCES

**A组基础题**

1*.*D因为双曲线*C*的右焦点*F*到渐近线的距离*|FA|=b*,*|OA|=a*,所以*ab=*2,又双曲线*C*的离心率为,所以*=*,即*b*2*=*4*a*2,解得*a*2*=*1,*b*2*=*4,所以双曲线*C*的方程为*x*2*-=*1,故选D*.*

2*.*B由已知得*=*2,所以*e====*,故选B*.*

3*.*A不妨设*|PF*1*|>|PF*2*|*,则所以*|PF*1*|=*4*a*,*|PF*2*|=*2*a*,且*|F*1*F*2*|=*2*c*,即*|PF*2*|*为最小边,即∠*PF*1*F*2*=*30*°*,则△*PF*1*F*2为直角三角形,所以2*c=*2*a*,所以*b=a*,即渐近线方程为*y=±x*,故选A*.*

4*.*B根据题意知,双曲线的焦点在*x*轴上,渐近线方程为*y=±x.*因为直线*l*平行于双曲线*C*的一条渐近线,所以*=*2*.*

直线*l*:*y=*2*x-*2与*x*轴的交点坐标为(1,0),即双曲线*C*的一个顶点坐标为(1,0),所以*a=*1,则*b=*2*a=*2,故双曲线*C*的焦点到渐近线的距离为2,故选B*.*

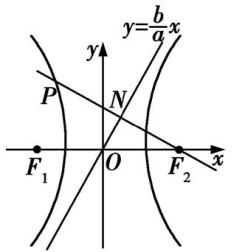
5*.*D∵2*|+|*≤*||*,∴4*||*≤2*c*,即*||*≤*.*又*||*≥*a*,∴*a*≤,即*c*≥2*a*,∴*e=*≥2*.*故选D*.*

6*.*C易知双曲线的两个焦点分别为*F*1(*-*4,0),*F*2(4,0),恰为两个圆的圆心,两个圆的半径分别为2,1,所以*|PM|*max*=|PF*1*|+*2,*|PN|*min*=|PF*2*|-*1,故*|PM|-|PN|*的最大值为(*|PF*1*|+*2)*-*(*|PF*2*|-*1)*=*(*|PF*1*|-|PF*2*|*)*+*3*=*5*.*同理*|PM|-|PN|*的最小值为(*|PF*1*|-*2)*-*(*|PF*2*|+*1)*=*(*|PF*1*|-|PF*2*|*)*-*3*=-*1,所以*|m-n|=*6,故选C*.*

**Ｂ组提升题**

7*.*C易知双曲线的渐近线方程为*y=±x*,则点*F*(*c*,0)到渐近线的距离为*==b*,即圆*F*的半径为*b.*令*x=c*,则*y=±b=±*,由题意,得*b=*,即*a=b*,所以双曲线的离心率*e==*,故选C*.*

8*.*C如图D 10*-*2*-*3,直线*PF*2的方程为*y=-*(*x-c*),设直线*PF*2与直线*y=x*的交点为*N*,易知*N*(,)*.*又线段*PF*2的中点为*N*,所以*P*(,)*.*因为点*P*在双曲线*C*上,所以*-=*1,即5*a*2*=c*2,所以*e==.*故选C*.*



图D 10*-*2*-*3

9*.*B双曲线*C*:*-=*1中,*a=*4,*b=*3,*c=*5,右焦点*F*(5,0),渐近线方程为*y=±x.*不妨设*M*在直线*y=x*上,*N*在直线*y=-x*上,则直线*MF*的斜率为*-*,其方程为*y=-*(*x-*5),设*M*(*t*,*t*),代入直线*MF*的方程,得*t=-*(*t-*5),解得*t=*,即*M*(,)*.*由对称性可得*N*(,*-*),所以直线*MN*的方程为*x=.*设*P*(*m*,*n*),则*d=|m-|*,*-=*1,即*n*2*=*(*m*2*-*16),则*|PF|==|*5*m-*16*|.*故*==*,故选B*.*

10*.*由题意知,*F*(*-c*,0)*.*不妨令*A*(0,*b*),则直线*AF*:*y=x+b.*

因为直线*AF*与渐近线*y=x*相交,

联立得消去*x*,得*yB=.*

由*=*3,得*yB=*4*b*,所以*=*4*b*,化简得3*c=*4*a*,所以离心率*e=.*